# 第 1 章　整数の性質

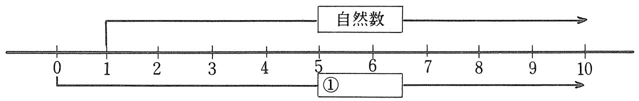
## §1　素（そ）　数（すう）

### 1．素数

目 標　自然数（しぜんすう）や整数（せいすう）（ここでは 0 以上の整数のみを考える）が、ものの順序を表したり、個数を表すのに用いられることを理解し、素数の意味を知る。

学 習　・5 個のコイルを圧延し、3 個目のコイルは級外になった、などというときの 5 や 3 のように、個数や順序を表す数を**自然数**という。（3.5 や $\frac{1}{5}$ などは自然数ではない）

・自然数と 0 をあわせて**整数**という。整数は、下図のように数直線上に表すことができる。




・整数の中で 4，6 ……などは $4 = 2\times2$，$6 = 2\times3$　のように、整数×整数（整数の積（せき）という）で表される。このように、整数 $a$ が整数 $b$ と整数 $c$ の積（$a = b\times c$）になっているとき、$a$ を $b$ および $c$ の**倍数**（ばいすう）、$b$，$c$ を $a$ の**約数**（やくすう）という。

なお、1 はすべての自然数の約数である。

一方、整数の中で 2，3 ……などは、1 とその数自身のほかに約数がない。これを**素数**という。ただし、1 は素数にいれないことにする。

**ポイント**

ものの個数や順序を表す数が**自然数**で、0 と自然数とをあわせて**整数**という。
自然数の中で、1 および自分自身のほかに約数がない数が**素数**である。

**例題 1**　3 は素数であるが、10 は素数でない。そのわけをいえ。

**解き方**　素数の意味から考える。3 の約数は 1，3 で、約数が 1 とその数自身の 2 つだけだから、素数である。10 は、約数が 1 と自分自身のほかにも 2 と 5 があるから ② ＿＿＿ ではない。





**類題 1**　27 は素数でない。そのわけをいえ。

**例題 2**　右の数表を使って、1 から 50 までの整数から素数をえらびだせ。

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ~~1~~ | 2 | 3 | ~~4~~ | 5 | ~~6~~ | 7 | ~~8~~ | ~~9~~ | ~~10~~ |
| 11 | ~~12~~ | 13 | ~~14~~ | ~~15~~ | ~~16~~ | 17 | ~~18~~ | 19 | ~~20~~ |
| ~~21~~ | ~~22~~ | 23 | ~~24~~ | ~~25~~ | ~~26~~ | ~~27~~ | ~~28~~ | 29 | ~~30~~ |
| 31 | ~~32~~ | ~~33~~ | ~~34~~ | ~~35~~ | ~~36~~ | 37 | ~~38~~ | ~~39~~ | ~~40~~ |
| 41 | ~~42~~ | 43 | ~~44~~ | ~~45~~ | ~~46~~ | 47 | ~~48~~ | ~~49~~ | ~~50~~ |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

（エラトステネスのふるい）

**解き方**　小さい数から素数を残し、その素数の倍数を消していく。

(1)　1 は素数でないから消す。

(2)　2 は素数であるから残し、2 の倍数を消す。

(3)　3 を残し、3 の倍数を消す。

(4)　① ＿＿＿ を残して ② ＿＿＿ を消す。

……このような手順をくり返して素数を残していく。

**類題 2**　例題 2 のような方法で、51 から 100 までの整数から素数をみつけよ。

### 2．素因数分解（そいんすうぶんかい）

目 標　数の因数の意味と整数の素因数分解の意味を理解し、素因数分解の方法について習熟する。

学 習　・ある自然数 $a$ をいくつかの自然数の積とみるとき、これらの自然数を $a$ の**因数**という。

たとえば、$12 = 3\times4$　または、$12 = 2\times2\times3$　とみることができる。このとき、3，4 または 2，2，3 を 12 の因数という。

・自然数 $a$ の因数が素数のとき、それを $a$ の**素因数**という。

たとえば、$30 = 2\times3\times5$　で表すとき、2，3，5 はいずれも素数であるから、これらの因数は 30 の素因数という。

・ある自然数 $a$ を素数だけの積の形で表すことを、自然数 $a$ を**素因数に分解する**という。

たとえば、$36 = 2\times2\times3\times3$　と表せば、2，3 は素数であるから、36 を素因数に分解したことになる。（1 は素数でないから素因数にはいれない）

・同じ数を何個かかけあわせた数を**累乗**（るいじょう）といい、これを

$3\times3 = 3^2$（3 の 2 乗または平方（へいほう）と読む）

$2\times2\times2 = 2^3$（2 の 3 乗または立方（りっぽう）と読む）

のように表す。

・累乗において、かけあわされる個数を示すために、右かたに小さくかかれた数を累乗の**指数**という。

$2^{3}$ ← 指数

**注　意**　$2^3$ は２を３回かけあわせる（２×２×２）ことで、２に３をかける（２×３）ことではない。

**ポイント**

自然数 $a$ をいくつかの自然数の積で表すとき、それらの自然数を $a$ の**因数**といい、素数である因数を**素因数**という。自然数を素因数だけの積で表すことが**素因数分解**である。

**例題１**　24 を２つの因数に分解せよ。

**解き方**　かけあわせて、24 になる数を求める。

1×24　　2×12　　3×8　　4×$\boxed{①\quad}$

**類題１**　36 を２つの因数の積の形で表せ。その表し方は、因数の順序を考えなければ、いく通りあるか。

**例題２**　36 を素因数に分解せよ。

**解き方**　素因数で、割れなくなるまで割っていく。

$$\begin{array}{r|l} 2 & 36 \\ \hline 2 & 18 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array} \quad \text{または} \quad \begin{array}{r|l} 3 & 36 \\ \hline 3 & 12 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline & 2 \end{array}$$

なるべく小さい素数で順に割る。

36＝2 × 2 × 3 × 3

答　$36=2^2\times\boxed{②\quad}$

**注　意**　素因数分解の結果は、小さい素因数から順にかき、同じ数は累乗で表す。

**類題２**　次の各数を素因数に分解せよ。

①　24　　②　60　　③　72　　④　420

**例題３**　72 になるべく小さい整数をかけて、ある整数の平方になるようにしたい。どんな数をかけたらよいか。

**ヒント**　ある整数を２乗した数は素因数分解すると各素因数の指数が偶数となる。

**解き方**　72 を素因数分解すると　$72=2^3\times3^2$　　２の累乗の指数が奇数

２の累乗の指数を偶数にする　$2^3\times3^2\times\boxed{③\quad}$

これは、$2^4\times3^2=4^2\times3^2=(4\times3)^2=\boxed{④\quad}^2$　　答　$\boxed{⑤\quad}$

**類題３**　540になるべく小さい整数をかけて、ある整数の２乗になるようにしたい。かける整数を求めよ。

**類題４**　324はある整数の平方になることを、素因数分解を利用して説明せよ。

(答)（学　習）①整数　（例題１）②素数





# §２　最大公約数・最小公倍数

## １．最大公約数

**目　標**　最大公約数の意味を理解し、その求め方を知り、最大公約数を使って問題が解けるようになる。

**学　習**　・２つ以上の整数に共通な約数を**公約数**といい、そのうち最も大きい公約数を**最大公約数**という。

たとえば、８の約数は 1, 2, 4, 8 で、12 の約数は 1, 2, 3, 4, 6, 12 である。このうち、８と 12 の公約数は 1, 2, 4 で、最大公約数は４である。

・２つ以上の整数の公約数は、それぞれの整数を素因数分解して、共通な素因数を組みあわせてできる数全部である。ただし、１も公約数にいれる。

たとえば、24, 36 の公約数は、24, 36 を素因数に分解して

$24=2^3\times3$　$36=2^2\times3^2$　で、共通な素因数は 2, 2, 3 である。

これを組みあわせた公約数は、1, 2, 3, 4, 6, 12 の６つである。

公約数や最大公約数を求めるとき、共通な素因数は全部用いる。たとえば、共通素因数が $2^2$, 3 のとき、２と３の２個でなく、2, 2, 3 の３個である。

・２つ以上の整数の最大公約数を求めるには、それらの整数に共通な素因数の積を求めればよい。たとえば、36, 54, 90 の最大公約数は、

$$\begin{array}{rcccc} 36= & 2 & \times2\times & 3\times3 & \\ 54= & 2 & \times & 3\times3 & \times3 \\ 90= & 2 & \times & 3\times3 & \times5 \\ \hline \end{array}$$

共通な素因数 $\boxed{①\quad\times\quad\times\quad}$

右のように共通な素因数で割れなくなるまで割っていき、それらの素因数の積を求めてもよい。

$$\begin{array}{r|l} 2 & 36,\ 54,\ 90 \\ \hline 3 & 18\quad 27\quad 45 \\ \hline 3 & 6\quad 9\quad 15 \\ \hline & 2\quad 3\quad 5 \end{array}$$

→ 2×3×3＝18

最大公約数　18　である。

**ポイント**

いくつかの整数の公約数は、それらの整数の共通な素因数をみつけて求める。

最大公約数は、共通な素因数全部の積である。

**例題１**　(54, 72) の公約数の個数を求めよ。

**解き方**　素因数分解して、$54=2\times3^3$，　$72=2^3\times3^2$　共通素因数（2, 3, 3）

これを組みあわせて、1, 2, 3, 2×3, $\boxed{②\quad\times\quad}$, $\boxed{③\quad\times\quad\times\quad}$ の６つである。

(答)（類題１）約数が１と 27 のほかに３と９があるから　（例題２）① 5　② 5 の倍数

（類題２）素数は　53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

**類題１**　**次の２つの数の公約数を求めよ。**

①　24，60　　　　　②　70，84

**例題２**　**(54，90，126)の最大公約数を求めよ。**

ヒント　３つの数の共通な素因数をみつけ、それらの積を求める。

**解き方**　54，90，126　を素因数に分解する。

$54=2\times3^3$
$90=2\times3^2\times5$
$126=2\times3^2\times7$

共通な素因数は　［①　，　，　］

最大公約数　［②　　］

（別解）

2 ) 54，90，126
3 ) 27　45　63
3 ) 9　15　21
　　3　5　7

［③　×　×　］＝18

**類題２**　**次の各組の最大公約数を求めよ。**

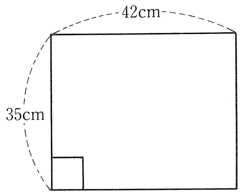
①　$2^3\times3^2\times5$，$2\times3^3\times5$　　②　54，63，72

③　360，420　　④　$2\times3^2\times5\times7$，$2\times3\times7^2$，$2^2\times3^2\times7$

ヒント　②や③は、**例題２**　の右側の方法が便利である。

**例題３**　**たて35cm、横42cm の長方形の鋼板がある。**

**この鋼板から端ぎれの鋼板がでないように、なるべく大きな正方形をきりとれば、正方形は何枚とれるか。**




ヒント　長方形のたて、横の長さが、正方形の１辺の長さで、きっちり割りきれなければならない。

**解き方**　35 と 42 の公約数は、たて、横をきっちり割ることができる。

35，42　の公約数は、１と［④　　］である。なるべく大きい正方形だから、最大公約数［⑤　　］をとる。

正方形の枚数は、たてに　35÷7＝5　横に　42÷7＝6　ならぶ。

したがって、全体は［⑥　×　］で求められる。

答［⑦　　］枚

**類題３**　**たてが228cm、横が264cmの長方形の床に、すきまなく正方形のタイルを張りたい。タイルは、１辺が５cm以上10cm以下のものを使うとしたら、１辺が何cmのタイルが何枚いるか。**

(答)（例題１）①　6　（類題１）1×36，2×18，3×12，4×9，6×6 の５通り（例題２）②$3^2$
（類題２）①$2^3\times3$　②$2^2\times3\times5$　③$2^3\times3^2$　④$2^2\times3\times5\times7$　（例題３）③2　④12　⑤2
（類題３）$540=2^2\times3^3\times5$ だから 15 をかける（類題４）$324=2^2\times3^4$　素因数の指数が偶数だから $(2\times3^2)^2=18^2$

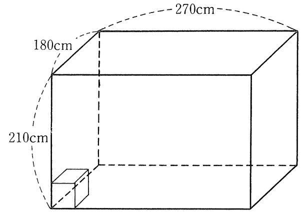




**類題４**　**右の図のような直方体の箱がある。**

**たてが180cm、横が270cm、高さが210cmのこの箱に、できるだけ大きな立方体の箱をすきまなくつめこみたい。**

**１辺がいくらの立方体を何個いれればよいか。**




**類題５**　**たて90cm、横120cm、高さ60cmの直方体の箱がある。この箱の中に、立方体の角材をすきまなくいれるとする。どんな種類の立方体の角材が、それぞれ、何個はいるか。**

**ただし、箱にいれる立方体の角材の１辺の長さは10cm以上20cm以下とする。**

コーヒータイム

鉄鋼業では、その取り扱うトン数が大きいため、わずか数%以下の歩留まりでも、すぐ月間数千万円の利益につながる場合が多い。歩留まりで重要なことは「如何に切りすて部分を少なくするか？」にある。そのためには、転炉の出鋼から　鋼塊→スラブ→ホットコイル→などの各工程で、そのトン数が最終の製品規格の「整数倍」になっていることが必要であり、そのように中間製品も設定されていなければならない。

しかし実際問題として、製品規格は各種あって、その１つ１つに対応した中間製品を設定することは無理であるので、数種類にまとめて互いに共用できるように考える必要がある。

そのためには、どうしても最小公倍数とか最大公約数の考え方が必要なのである。

(答)（学　習）①2×3×3　（例題１）②3×3　③2×3×3