1章　連立方程式

§1　連立方程式の解

目標　連立方程式および，連立方程式の解の意味について学習する。

基礎となる事項　・　方程式の解き方（初級Ⅰ　4章§1－2）

学習　・　次の2つのことがらがわかっている。

① ダンボール箱に2種類の部品が合計6個入っている。

② 部品A，Bのそれぞれ1個の重さは5kg，2kgであり，ダンボール箱内の部品全体の重さは18kgである。

部品Aをx個，部品Bをy個として，これを式に表すと

① $x+y=6$ ……………………(1)

② $5x+\boxed{①\quad}y=18$ …………(2)

となる。

(1)の式を成り立たせるxとyの値の組は

$\begin{cases} x=0\text{ ならば} \\ y=6 \end{cases}$　$\begin{cases} x=1\text{ ならば} \\ y=5 \end{cases}$　同様に次の5組ができる。

$\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$　$\begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$　$\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$　$\begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$　$\begin{cases} x=6 \\ y=0 \end{cases}$

(2)の式を成り立たせるxとyの値の組は

$x=0$ ならば，$5\times0+2y=18$　で，$y=9$

$x=1$ ならば，$5\times1+2y=18$　で，$y=\dfrac{13}{2}$

これをつづけて，表にまとめると右の表になる。

x	0	1	2	3	4
y	9	$\frac{13}{2}$	4	$\boxed{②\quad}$	-1

(1)と(2)の式を，ともに成り立たせるxとyの値の組は

$\begin{cases} x=2 \\ y=\boxed{③\quad} \end{cases}$　だけである。

このように，2つ以上の方程式を組み合わせた方程式を**連立方程式**（れんりつほうていしき）といい，それらの方程式を同時に成り立たせる変数の値の組を連立方程式の**解**（かい）という。

連立方程式の解を求めることを，**連立方程式を解く**（と）という。

ポイント

2つ以上の方程式を組み合わせた方程式を，**連立方程式**という。この連立方程式を同時に成り立たせる変数の組を連立方程式の**解**という。

この解を求めることを**連立方程式を解く**という。

例題1　次の連立方程式のうち，$\begin{cases} \boldsymbol{x=3} \\ \boldsymbol{y=-2} \end{cases}$ が解であるものを選べ。

(1) $\begin{cases} x+y=1\text{……①} \\ x-y=5\text{……②} \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 2x+y=9\text{……①} \\ x+2y=-1\text{…②} \end{cases}$　(3) $\begin{cases} y=3x-11\text{……①} \\ y=-2x+4\text{…②} \end{cases}$

ヒント　$x=3$，$y=-2$を代入して，①と②の2つの式を同時に成り立たせるかどうかをみればよい。

解き方　(1)　①の左辺$=3+(-2)=1$，右辺$=1$　で成り立つ。

②の左辺$=3-\boxed{①\quad}=5$，右辺$=5$　で成り立つ。

したがって，$\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ は，連立方程式の解である。

(2)　①の左辺$=2\times3+(-2)=6-2=4$，右辺$=\boxed{②\quad}$

したがって，$\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ は，①の解でないから，連立方程式の解で$\boxed{⑤\quad}$。

(3)　①の左辺$=-2$，右辺$=\boxed{④\quad}=-2$

②の左辺$=-2$，右辺$=-2\times3+4=\boxed{⑤\quad}$，したがって，解で$\boxed{⑥\quad}$。

類題1　次の連立方程式のうち，$\begin{cases} \boldsymbol{x=-1} \\ \boldsymbol{y=4} \end{cases}$ が解であるものを選べ。

① $\begin{cases} x-2y=-9 \\ 2x+5y=18 \end{cases}$　② $\begin{cases} 2x+y=2 \\ y=1-3x \end{cases}$　③ $\begin{cases} 4x+7y=24 \\ 5x+3y=17 \end{cases}$

類題2　次の連立方程式について，(　)内に示された$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{y}$の値の組は，その解か。

① $\begin{cases} 7x+y=5 \\ 2x-3y=8 \end{cases}$　$\left(\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}\right)$

② $\begin{cases} x=6y \\ y=2x-9 \end{cases}$　$\left(\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}\right)$

§2　連立二元一次方程式

1．連立二元一次方程式の解き方（加減法）

> **目　標**　連立二元一次方程式の解き方（加減法）を学習する。

基礎となる事項　・等式の性質（初級Ⅰ　4章§1－1）

学　習　・2種類の変数 x，y の一次式で作られている方程式を，**二元一次方程式**という。（一次方程式で変数が1つの式を一元一次方程式，変数が3つの式を三元一次方程式という。）

・連立二元一次方程式は，2つの方程式を加え合わせたり，ひいたりして解くことができる。

たとえば，連立方程式 $\begin{cases} x+y=12 \cdots\cdots(1) \\ x-y=8 \quad \cdots\cdots(2) \end{cases}$ を解くには，

(1)と(2)の左辺，右辺どうしを，それぞれ加え，

$$(x+y)+\boxed{\text{①}\qquad}=12+8$$

$$2x=20$$

と，x のみの式にし　$x=\boxed{\text{②}\quad}$

と，x の値を求め，これを(1)に代入し

$\boxed{\text{③}\quad}+y=12$　　$\therefore\ y=\boxed{\text{④}\quad}$

と，y の値を求める。連立方程式の解は，$\begin{cases} x=\boxed{\text{⑤}\quad} \\ y=\boxed{\text{⑥}\quad} \end{cases}$ となる。

上で，(1)+(2)とすると，y の項がなくなった。このように，一方の変数を含まない方程式をつくることを，その変数を**消去する**という。

また，(1)−(2)とすると，$(x+y)-(x-y)=12-8$ より，$2y=4$ となり，x が消去される。最初に x を消去しても連立方程式は解ける。

> **ポイント**
> 連立二元一次方程式は，連立している2つの方程式を，加え合わせたり，ひいたりして，一方の変数を消去し，一元一次方程式にして解くことができる。
> この方法を，**加減法**という。

（答）（学　習）①2　②$\frac{3}{2}$　③4

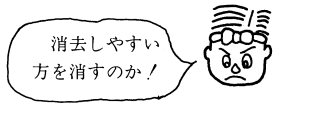
例題1　連立方程式 $\begin{cases} \boldsymbol{3x-y=8} \cdots(1) \\ \boldsymbol{x-y=2} \cdots(2) \end{cases}$ を加減法で解け。

解き方　y の係数が等しいから，y を消去する方がやりやすい。

(1)−(2)

$$\begin{array}{rl} & 3x-y=8 \\ -) & x-y=2 \\ \hline & 2x \quad =\boxed{\text{①}\quad} \end{array}$$

$\therefore\ x=3$



$x=3$ を，(2)に代入すると，

$3-y=2$

$-y=2-3$

$\therefore\ y=\boxed{\text{②}\quad}$　　答 $\begin{cases} x=3 \\ y=\boxed{\text{③}\quad} \end{cases}$

類題1　次の連立方程式を，加減法を用いて解け。

① $\begin{cases} 3x-y=12 \\ 5x+y=4 \end{cases}$　② $\begin{cases} 2x+y=9 \\ 2x-3y=-3 \end{cases}$　③ $\begin{cases} 2x+6y=9 \\ -2x+4y=11 \end{cases}$

④ $\begin{cases} 3x-y=15 \\ 2x+y=0 \end{cases}$　⑤ $\begin{cases} x-6y=1 \\ x-3y=-2 \end{cases}$

例題2　連立方程式 $\begin{cases} \boldsymbol{2x+y=1} \cdots\cdots(1) \\ \boldsymbol{x-2y=8} \cdots\cdots(2) \end{cases}$ を加減法で解け。

ヒント　x，y のどちらかの係数の絶対値を等しくし，加減法により解く。この場合は(1)の両辺を2倍して，y の係数の絶対値を(2)の y の係数の絶対値と等しくし，2つの式を加えて解けばよい。

解き方　(1)×2+(2)

$$\begin{array}{rl} & 4x+2y=\boxed{\text{④}\quad}\cdots\cdots(1)' \\ +) & x-2y=8 \\ \hline & \boxed{\text{⑤}\quad}x \quad =10 \end{array}$$

$x=\boxed{\text{⑥}\quad}$

$x=2$ を，(1)に代入すると，

$2\times\boxed{\text{⑦}\quad}+y=1$

$\therefore\ y=\boxed{\text{⑧}\quad}$　　答 $\begin{cases} x=\boxed{\text{⑨}\quad} \\ y=\boxed{\text{⑩}\quad} \end{cases}$

注　意　(1)式を変形したものを(1)′，(2)式を変形したものを(2)′，………として解いていくとわかりやすい。

（答）（例題1）①−2　②9　③ない　④3×3−11　⑤−2　⑥ある　（類題1）①，②
（類題2）①解である　②解でない

類題2　次の連立方程式を加減法で解け。

① $\begin{cases} 2x-3y=12 \\ x-2y=7 \end{cases}$　② $\begin{cases} 5x-2y=3 \\ 2x+y=12 \end{cases}$　③ $\begin{cases} 3x-y=-12 \\ x+2y=16 \end{cases}$　④ $\begin{cases} 3x-5y=16 \\ 4x+y=6 \end{cases}$

例題３　次の連立方程式 $\begin{cases} \boldsymbol{5x+2y=8} \cdots\cdots(1) \\ \boldsymbol{4x-3y=11} \cdots\cdots(2) \end{cases}$ を加減法で解け。

ヒント　一方の式を何倍かするだけでは，x または y の係数の絶対値が等しくならないときは，一方の変数の係数の絶対値の最小公倍数を求め，その変数の係数の絶対値が２式ともその最小公倍数になるように，２つの式をそれぞれ何倍かし解を求める。

解き方　y の係数に着目し(1)を３倍し，(2)を２倍する。

(1)×３　$15x+\boxed{\text{①}}\ y=24\cdots\cdots(1)'$

(2)×２　$8x-\boxed{\text{②}}\ y=22\cdots\cdots(2)'$

y の係数の絶対値が等しく，符号が反対だから，２つの式を加えて y を消去する。

$(1)'+(2)'$　$23x=46$

$\therefore\ x=2$

$x=2$ を，(1)に代入すると，$\boxed{\text{③}}\times\boxed{\text{④}}+2y=8$

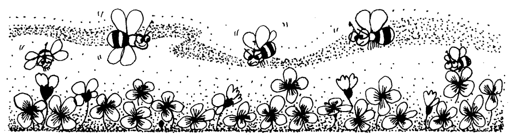
$2y=\boxed{\text{⑤}}$

$\therefore\ y=\boxed{\text{⑥}}$　　答 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

類題3　次の連立方程式を加減法で解け。

① $\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 3x+2y=7 \end{cases}$　② $\begin{cases} 2x-3y=0 \\ -5x+7y=-1 \end{cases}$　③ $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 2x+7y=34 \end{cases}$

④ $\begin{cases} 5x+3y=7 \\ 4x-7y=15 \end{cases}$　⑤ $\begin{cases} 3x-5y=20 \\ 4x-2y=8 \end{cases}$　⑥ $\begin{cases} 6x+5y=8 \\ 10x+3y=24 \end{cases}$



（学　習）①（$x-y$）② 10　③ 10　④ 2　⑤ 10　⑥ 2

2.　やや複雑な連立二元一次方程式の解き方

目　標　かっこや小数・分数係数のあるやや複雑な形の連立二元一次方程の解き方について学習する。

基礎となる事項　・やや複雑な方程式の解き方（初級Ⅰ　4章§１－３）

学習　・次の連立二元一次方程式を解いてみよう。

$\begin{cases} 0.05x+0.03y=0.23\cdots\cdots(1) \\ x-3(y-x+3)=4\ \ \cdots\cdots(2) \end{cases}$

式が小数をふくんでいたり，(　)があったりしても，両辺を何倍かしたり，(　)をはずしたりし，式を $ax+by=c$ の形に整理して，いままでどおりの方法で解けばよい。

(1)の両辺を 100 倍すると　$5x+3y=\boxed{\text{①}}\cdots\cdots(1)'$

(2)の(　)をはずすと　$x-3y+3x-9=4$

整理すると　$4x-3y=13\cdots\cdots\cdots\cdots(2)'$

(1)と(2)の連立方程式を解くかわりに，それを変形した$(1)'$と$(2)'$の連立方程式を解く。

$(1)'+(2)'$
$$\begin{array}{rl} & 5x+3y=23 \\ +) & 4x-3y=13 \\ \hline & \boxed{\text{②}}\,x\ \ =36 \end{array}$$

$\therefore\ x=\boxed{\text{③}}$

$x=4$を，$(1)'$に代入する

$5\times\boxed{\text{④}}+3y=23$

$3y=\boxed{\text{⑤}}$

$\therefore\ y=\boxed{\text{⑥}}$　　答 $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$

・分数係数がある場合も，両辺に分母の最小公倍数をかけ係数を整数にし，同様の方法により解けばよい。

ポイント

複雑な連立二元一次方程式は，かっこをはずし，小数や分数係数を整数にし，$ax+by=c$　の形に整理して解けばよい。

(答)　(例題１)　① 6　② 1　③ 1　(類題１)　① $x=2,\ y=-6$　② $x=3,\ y=3$　③ $x=-\frac{3}{2},\ y=2$　④ $x=3,\ y=-6$　⑤ $x=-5,\ y=-1$　(例題２)　④ 2　⑤ 5　⑥ 2　⑦ 2　⑧ −3　⑨ 2　⑩ −3