1章　座標と図形の移動

§1　分点の座標

1.　線分を $m:n$ に内分する点の座標

目　標　座標平面上の2点を結ぶ線分を，ある比に内分する点の座標の求め方について学習する。

基礎となる事項　・座標（初級Ⅰ　7章　§3－1）
・線分の等分（初級Ⅱ　8章　§2－4）

学習　・2点 $P(x_1,\ y_1)$，$Q(x_2,\ y_2)$ を結ぶ線分を，$m:n$ $(m,n>0)$ に内分する点の座標を求めてみよう。

求める点を $R(x,\ y)$ とし，P，Q，R からそれぞれ x 軸に垂線を下し，その足（x 軸との交点）をP_1，Q_1，R_1とすると，

$PR:RQ=m:n$　より

$P_1R_1:R_1Q_1=m:n$　（初級Ⅱ　8章　§3－2）

$\therefore\ \ mR_1Q_1=nP_1R_1$……(1)（初級Ⅰ　6章　§3－2）

$x_1<x_2$ のとき，$P_1R_1=x-x_1$，$R_1Q_1=x_2-x$

であるから，(1)に代入して

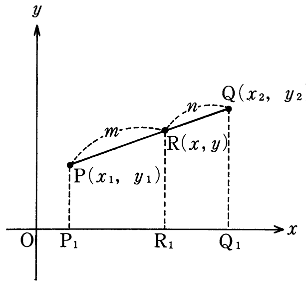
$m(x_2-x)=n(x-\boxed{①\quad})$

$(m+n)x=nx_1+mx_2$

$\therefore\quad x=\dfrac{nx_1+mx_2}{\boxed{②\quad}}$ ……(2)

$x_1>x_2$，$x_1=x_2$ のときも，(2)が成り立つ。

同様にして，$y=\dfrac{ny_1+my_2}{m+n}$



ポイント

2点$P(x_1,\ y_1)$，$Q(x_2,\ y_2)$ を結ぶ線分を $m:n$ $(m,\ n>0)$ に内分する点の座標は，$\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$

特にPQの中点（ちゅうてん）の座標は，$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

2.　重心の座標

目　標　三角形の重心の座標を求めることについて学習する。

基礎となる事項　・三角形の重心（初級Ⅱ　8章　§2－5）

学習　・まず重心について復習しておこう。

三角形の頂点と，その対辺の中点を結ぶ線分を，この三角形の**中線**（ちゅうせん）という。

三角形の3つの中線は1点で交わり，その交点を，この三角形の**重心**（じゅうしん）という。

そして，三角形の重心は，次のようになっている。

△ABCの頂点Aと辺BCの中点Mとを結ぶ中線AMを2：1に内分する点が，△ABCの重心である。

・そこで△ABCの頂点の座標を，$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，$C(x_3,\ y_3)$ とするとき，重心Gの座標を求めてみよう。

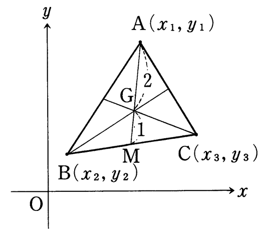
まずBCの中点Mの座標は，$\left(\dfrac{x_2+x_3}{2},\ \dfrac{y_2+y_3}{2}\right)$

したがって，線分AMを 2：1 に内分する点Gの座標は，前ページの(ポイント)から，

$\left(\dfrac{x_1+2\times\dfrac{x_2+x_3}{2}}{2+1},\ \dfrac{y_1+2\times\dfrac{y_2+y_3}{2}}{2+1}\right)$

すなわち，

$\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$



ポイント

△ABCの頂点の座標を，$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，$C(x_3,\ y_3)$ とするとき，△ABCの重心Gの座標は，

$$\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

例題1　(3, 5), (0, −1), (2, 1)を頂点とする三角形の重心の座標を求めよ。

解き方　重心の座標は $\left(\dfrac{3+0+2}{3},\ \dfrac{5-1+1}{3}\right)$

$\therefore\ \left(\boxed{①\quad},\ \boxed{②\quad}\right)$

§2　対称移動

1.　点対称

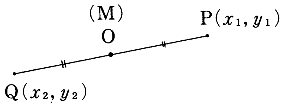
目標　座標平面上で，定点に関して対称な2点の座標の間の関係式について学習する。

基礎となる事項　・中点の座標（1章　§1—1）

学習　・平面上で点Qが，点Pと定点(ていてん)Mに関して対称というのは，点Qが、線分PMをMの方に延長した直線上，PMと等しい距離にあることである。したがって，このとき，線分PQの中点がMに一致する。Qを点Mに関するPの対称点であるともいう。特に，座標平面上の2点P，Qが，原点Oに関して対称のときを考えよう。

2点P，Qの座標を$P(x_1,\ y_1)$，$Q(x_2,\ y_2)$とすると，線分PQの中点の座標は，$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$　これが原点Oと一致することより，

$$\frac{x_1+x_2}{2}=0\ ,\quad \frac{y_1+y_2}{2}=0$$



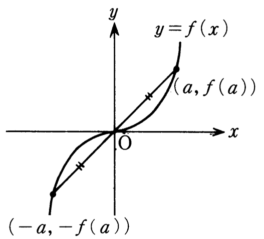
ゆえに，$x_2=-x_1$，$y_2=-y_1$（右図参照）

よって，任意の点$(x,\ y)$の原点に関する対称点は，点$(-x,\ -y)$である。

・任意の点$(x,\ y)$から，点$(-x,\ -y)$への対応（写像(しゃぞう)という）を

$$(x,\ y)\rightarrow(-x,\ -y)$$

とかき，これを**原点に関する対称移動**という。



・曲線 $y=f(x)$ が**原点に関して対称**であるとは，曲線上の任意の点 $(a,\ f(a))$ の原点に関する対称点 $(-a,\ -f(a))$ が，また曲線 $y=f(x)$ 上にあることである。すなわち，曲線 $y=f(x)$ について，$-f(x)=f(-x)$ が成り立つとき，曲線 $y=f(x)$ は，原点に関して対称である。一般に，関数 $y=f(x)$ について，$f(-x)=-f(x)$ が成り立つとき，関数 $f(x)$ を**奇関数**(きかんすう)という。すなわち，奇関数のグラフは，原点に関して対称である。

（答）（学　習）① x_1　② $m+n$

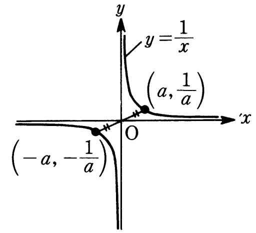
ポイント

・原点に関する対称移動　$(x,\ y)\longrightarrow(-x,\ -y)$

・曲線 $y=f(x)$ のグラフが，原点に関して対称になるための条件は，$f(x)$ が奇関数であること。すなわち，$f(-x)=-f(x)$

例題1　$y=\dfrac{1}{x}$ のグラフは原点に関して対称であることに示せ。

解き方　$y=\dfrac{1}{x}=f(x)$ とおくと



$$f(-x)=\frac{1}{(-x)}=-\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$$

つまり，$f(-x)=-f(x)$

したがって，$y=\dfrac{1}{x}$ は奇関数であり，そのグラフは原点に関して ①＿＿ となる。

類題1　次の関数のグラフのうち，原点に関して対称なものはどれか。

（奇関数はどれか）

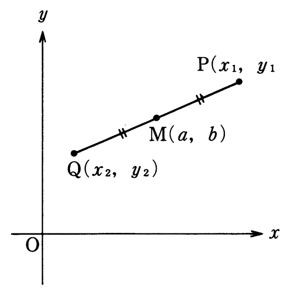
① $y=2x$　② $y=x^2$　③ $y=x^3+2x$

④ $y=x+\dfrac{1}{x}$　⑤ $y=x^2+2x$　⑥ $y=x+1$

例題2　点$P(x_1,\ y_1)$の定点$M(a,\ b)$に関する対称点Qの座標を求めよ。

解き方　点$P(x_1,\ y_1)$の定点$M(a,\ b)$に関する対称点Qの座標を$(x_2,\ y_2)$とする。

線分PQの中点の座標は，$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$。



これがMに一致することより，

$$\frac{x_1+x_2}{2}=a,\quad \frac{y_1+y_2}{2}=b$$

$$\therefore\quad x_2=2a-x_1,\quad y_2=2b-y_1$$

よって，$P(x_1,\ y_1)$の$M(a,\ b)$に関する対称点Qの座標は，

$(2a-x_1,$ ②＿＿$)$

ポイント

点$(x,\ y)$の点$(a,\ b)$に関する対称移動は，

$$(x,\ y)\longrightarrow(2a-x,\ 2b-y)$$

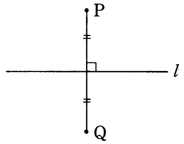
（答）（例題1）① $\frac{5}{3}$　② $\frac{5}{3}$

2.　線対称

> **目　標**　座標平面上で，定直線に関して対称な２点の座標の間の関係式について学習する。

基礎となる事項　・三角形の合同（初級Ｉ　８章　§２・§３）
・垂直二等分線（初級Ｉ　８章　§３－１）

学習　・２点P，Qの中点を通り，線分PQに垂直な直線をPQの**垂直二等分線**という。



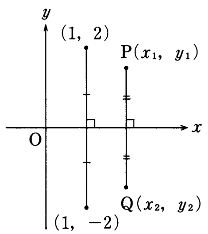
・平面上の２点P，Qと直線lに対して，２点P，Qが**直線 l に関して対称**とは，直線lが線分PQの垂直二等分線になるときをいい，lを**対称軸**という。

・２点P，Qが**x軸に関して対称**のとき，２点P，Qの座標の関係を求めよう。

右図においてP，Qの座標を$P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$とすると，線分PQはx軸に垂直だから，P，Qのx座標は等しい。すなわち，　$x_2=x_1$

また，線分PQの中点はx軸上にあるから，

$$\frac{y_1+y_2}{2}=0 \qquad \therefore \quad y_2=-y_1$$



ゆえに，任意の点$(x,\ y)$のx軸に関する対称点は，$(x,\ -y)$である。

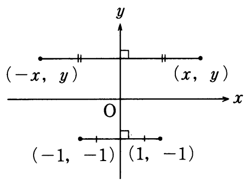
たとえば，$(1,\ 2)$のx軸に関する対称点は$(1,\ -2)$である。

・点$(x,\ y)$から点$(x,\ -y)$への対応（写像）を$(x,\ y)\to(x,\ -y)$とかき，これを**x軸に関する対称移動**という。

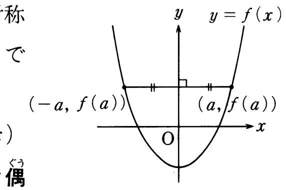
・同様に，**y軸に関する対称移動**は，

$(x,\ y)\to(-x,\ y)$

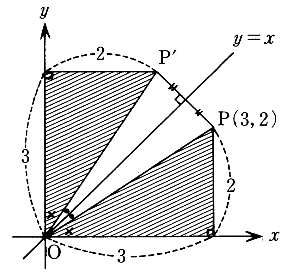
で与えられる。（右図参照）



・曲線$y=f(x)$が**y軸に関して対称**であるとは，曲線上の任意の点$(a,\ f(a))$のy軸に関する対称点$(-a,\ f(a))$が曲線$y=f(x)$上にあることである。すなわち，曲線$y=f(x)$について，$f(-x)=f(x)$が成り立つとき，曲線$y=f(x)$はy軸に関して対称で，このときの関数$f(x)$を**偶関数**（ぐうかんすう）という。



・次に，座標平面上で，点Pを直線$y=x$に関して対称な点P′へ移す対称移動で，点$P(3,\ 2)$がどのような点に移るかを考えてみよう。図に示すように，直線$y=x$に関して，点$P(3,\ 2)$と対称な点P′をとると，斜線をつけた２つの三角形が合同になるから，P′の座標は，$(2,\ 3)$になることがわかる。



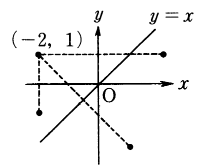
・一般に，点$P(x,\ y)$の$y=x$に関する対称点は，$(y,\ x)$となる。（この証明は，６章§４－２，**例題４**で与えられる。）

・直線$y=x$に関する対称移動は，$(x,\ y)\longrightarrow($ ①＿＿ $)$で与えられる。

> **ポイント**
> ・x軸に関する対称移動　　$(x,\ y)\longrightarrow(x,\ -y)$
> ・y軸に関する対称移動　　$(x,\ y)\longrightarrow(-x,\ y)$
> ・$y=x$に関する対称移動　　$(x,\ y)\longrightarrow(y,\ x)$
> ・曲線$y=f(x)$がy軸に関して対称であるための条件は，関数$f(x)$が偶関数であることで，$f(-x)=f(x)$

例題１　点$(-2,\ 1)$の次の対称軸に関する対称点を求めよ。

①　x軸　②　y軸　③　$y=x$

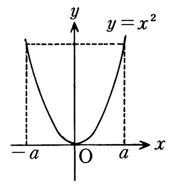


解き方　①　$(-2,\ 1)\longrightarrow(-2,\ -1)$

②　$(-2,\ 1)\longrightarrow($ ②＿＿ $,\ 1)$

③　$(-2,\ 1)\longrightarrow(1,$ ③＿＿ $)$

例題２　**$y=x^2$はy軸に関して対称であることを示せ。**



解き方　$y=x^2=f(x)$とおくと，

$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$　したがって，

$y=x^2$は偶関数であり，そのグラフはy軸に関して対称である。

類題１　次の関数のグラフのうち，**y軸に関して対称なもの**（偶関数）はどれか。

①　$y=2x$　　②　$y=x^2+1$　　③　$y=x^2+x$

④　$y=\dfrac{1}{x^2}$　　⑤　$y=(x-1)^2$　　⑥　$y=x^3+x^2$

（答）　（例題１）① 対称　（類題１）①，③，④　（例題２）② $2b-y_1$