1章　数列と極限

§1　数　列

1. 数　列

目 標　一定の規則に従って並んでいる数の列について学習する。

学習　・次の3つの数の並び

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20　(1)

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512　(2)

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \frac{1}{14}, \frac{1}{16}, \frac{1}{18}, \frac{1}{20}$　(3)

をみると，(1)では各数に2を加えたものが次の数であり，(2)では各数を2倍したものが次の数であり，(3)は(1)の数の逆数の並び（すなわち，分子は1で分母は各数に2を加えたものが次の数の分母である）になっている。この例のように，一定の規則に従って並んでいる数の並びを**数列**という。数列の各数を**項**といい，最初から順に，初項，第2項，第3項,……，最後の項を**末項**という。

・数列を一般的に表すのに，

$a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots\cdots,\ a_{n-1},\ a_n, \cdots\cdots$　(4)

と書くことが多い。項の番号を a の右下に小さくかく。

数列(1)では，初項は2，第2項は $4=2+2=2\times2$，第3項は $6=4+2=2\times3, \cdots\cdots$。これより，一般に，第 n 項は $2n$ となっていることが推測される。実際，$2n$ の n に1, 2, 3,……を代入してみると，(1)の初項が2，第2項が4，第3項が8,……が求められる。数列(2)では第 n 項は 2^n であり，(3)では第 n 項は $\frac{1}{2n}$ であることもわかる。このように，第 n 項が n の式で与えられると，n に1, 2, 3,……を代入してすべての項を求めることができる。これを数列の**一般項**という。したがって，一般項は数列の規則を表しているものとみることができる。一般項が a_n の数列を簡単に $\{a_n\}$ とかく。

ポイント
一定の規則に従って並んでいる数の並びを数列といい，その数を最初から順に，初項，第2項,……という。第 n 項を n の式で表したものを一般項という。

例題1　第 n 項が次の式で表される数列の，初項から第4項までをかけ。

①　$3n-1$　　②　n^2

解き方　$n=1,\ 2,\ 3,\ 4$ を代入して

①　2, 5, ①☐, 11　　②　1, $2^2=4$, $3^2=9$, $4^2=16$

類題1　第 n 項が次の式で表される数列の，初項から第4項までをかけ。

①　$3n^2$　　②　$2n+1$

例題2　次の数列の一般項（第 n 項）を推定し，それを使って第10項を求めよ。

$1\frac{1}{2},\ 2\frac{1}{4},\ 3\frac{1}{8},\ 4\frac{1}{16},\ 5\frac{1}{32}, \cdots\cdots$

解き方　各項の整数部分の列は，1, 2, 3, 4, 5,………で，その第 n 項は n

分数部分の列は $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots\cdots$で，その第 n 項は $\frac{1}{2^n}$ と考えられるので，

もとの数列の第 n 項は　$n+\frac{1}{2^n}$

よって，第10項は②☐

類題2　次の各数列の第 n 項を推定し，それを使って第10項を求めよ。

①　$1\times2,\ 2\times3,\ 3\times4,\ 4\times5,\ 5\times6, \cdots\cdots$

②　9, 99, 999, 9999, 99999,………

ヒント　$999=10^3-1$

例題3　次の数列の第 n 項を n の式で表せ。

1, −1, 1, −1, 1, −1, 1, −1,………

解き方　奇数番目の項が1，偶数番目の項が−1である。$(-1)^n$ は n が偶数のときは1を，奇数のときは−1を表すので，求める第 n 項は $(-1)^{n-1}$

類題3　次の各数列の初項から第4項までをかけ。

①　$\{(-1)^n n\}$　　②　$\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$　　③　$\left\{\frac{2}{3n+1}\right\}$

④　$\left\{\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right\}$　　⑤　$\{(2n-1)^2\}$

2.　等差数列

目　標　代表的な数列のひとつ，等差数列の性質について学習する。

基礎となる事項　・数列（1章　§1－1）

学習　・6ページの（学　習）の数列(1)では各項に2を加えると次の項となる。

また，数列　19, 16, 13, 10, 7, 4,………　(5)

は，各項に -3 を加えると次の項となる数列である。

・一般に，数列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots\cdots,\ a_n,\cdots\cdots \tag{6}$$

の各項が直前の項に一定数 d を加えて得られるとき，この数列を**等差数列**といい，一定数 d をその**公差**という。数列(1)は公差2，数列(5)は公差 -3 の等差数列である。

数列(6)が公差 d の等差数列であるとき，

$$a_2=a_1+d$$

$$a_3=a_2+d=a_1+2d$$

$$a_4=a_3+d=a_1+3d$$

…………………

となるので，第 n 項は次のように表される。

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

ポイント

数列の各項がすぐ前の項に一定数 d を加えて得られるとき，この数列を等差数列といい，一定数 d をその公差という。

数列(6)が公差 d の等差数列のとき，すべての n について，

$$a_n-a_{n-1}=d,\qquad a_n=a_1+(n-1)d$$

例題1　第8項が29，第20項が -7 の等差数列の初項と公差を求めよ。また，第 n 項と第100項を求めよ。

解き方　初項を a，公差を d とすると，第8項は $a+7d$，第20項は $a+19d$ と表されるので，

$$a+7d=29,\qquad a+19d=-7$$

これより，

$$a=50,\qquad d=-3$$

第 n 項は，

$$a+(n-1)d=50+(n-1)(-3)=50-3(n-1)=53-3n$$

第100項は，　$53-300=-247$

類題1　次の等差数列の第5項と第 n 項とを求めよ。

①　初項 -4，公差 7　　　②　初項 5，公差 -3

類題2　第4項が0，第10項が -2 であるような等差数列の初項と公差を求めよ。また，第 n 項と第100項を求めよ。

類題3　次の数列が等差数列であるとき，$\boxed{}$ にあてはまる数は何か。また，第 n 項を求めよ。

$$8,\ \boxed{},\ 2,\ \boxed{},\ \boxed{},\cdots\cdots$$

例題2　初項が72，公差 -4 の等差数列で，0となる項はあるか，もしあれば第何項か。

解き方　0となるのは第 n 項であるとする。

初項72，公差 -4 の等差数列の第 n 項は，

$$72+(-4)(n-1)$$

と表されるので，

$$72-4(n-1)=0$$

を解いて n を求めればよい。

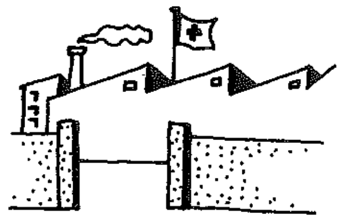
$$72-4n+4=0\qquad \therefore\ 4n=\boxed{①},\qquad n=19$$

よって，0となる項はあって，第19項である。

類題4　次の問いに答えよ。

①　初項 -10，公差7の等差数列で，ある項は53であるという。第何項か。

②　初項が20，公差が -3 である等差数列で，初項から第何項目で，はじめて負になるか。



《答》（例題1）① 8（類題1）① 3, 12, 27, 48　② 3, 5, 7, 9（例題2）② $10+\frac{1}{2^{10}}$

（類題2）① $n(n+1)$, 110　② 第 n 項　$\underbrace{99\cdots\cdots9}_{n個}=1\underbrace{0\cdots\cdots0}_{n個}-1=10^n-1$，第10項 $10^{10}-1$

（類題3）① $-1, 2, -3, 4$　② $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$　③ $\frac{2}{4}, \frac{2}{7}, \frac{2}{10}, \frac{2}{13}$　④ $\frac{1}{1\cdot3}, \frac{1}{3\cdot5}, \frac{1}{5\cdot7}, \frac{1}{7\cdot9}$　⑤ 1, 9, 25, 49

3．等差数列の和

目 標　等差数列の和について学習する。

基礎となる事項　・等差数列（1章　§1−2）

学 習　・2から20までの偶数の和Sは次のようにして簡単に求めることができる。

$$S=2+4+6+8+10+12+14+16+18+20 \qquad (1)$$

加える順序を逆にしてもその和は変らないから，

$$S=20+18+16+14+12+10+8+6+4+2 \qquad (2)$$

(1)と(2)を辺々加えると，右辺の初項の和，第2項の和…は，いずれも22となり，項の個数は10だから

$$2S=22+22+\cdots\cdots+22=22\times10$$

$$\therefore\quad S=\frac{22\times10}{2}=110$$

・一般の等差数列の和も同様の方法で計算することができる。

初項a，公差d，項数(項の個数)nの等差数列の末項をl，和をS_nとすると，

$$S_n=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+(l-d)+l \qquad (3)$$

加える順を逆にすると，

$$S_n=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots\cdots+(a+d)+a \qquad (4)$$

(3)と(4)を辺々加えると，右辺各項の和はいずれも$a+l$となり，

$$2S_n=(a+l)+(a+l)+\cdots\cdots+(a+l)=n(a+l)$$

$$\therefore\quad S_n=\frac{n(a+l)}{2} \qquad (5)$$

$l=a+(n-1)d$ だから，これを(5)へ代入すると，

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

ポイント

初項a，公差dの等差数列の末項をl，初項から第n項までの和をS_nとすれば，

$$S_n=\frac{n(a+l)}{2}$$

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

例題1　1から19までの奇数の和を計算せよ。

解き方　この奇数の列は，初項1，公差2の等差数列で，項数は，

$$\frac{19-1}{2}+1=10$$

だから，1から19までの奇数の和Sは，

$$S=\frac{10(1+19)}{2}=100(=10^2)$$

注 意　1からはじまるn個の奇数の和はn^2に等しい。これは(例題1)の解き方と同様の方法で証明できる。

類題1　1からはじまるn個の奇数の列は公差2の等差数列である。

①　末項を求めよ。　　②　n個の奇数の和を求めよ。

類題2　次の等差数列の和を求めよ。

①　初項3，公差4，項数8

②　第4項が0，第10項が−2，項数10

③　6，4，2，0，…… (第10項まで)

類題3　1からnまでの自然数の和を求めよ。

類題4　100より小さい正の整数のうち，3で割り切れる数の和を求めよ。

〈研究〉　一般に，数列の和（項数n）

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$$

を記号Σを使って次のようにかくことがある。Σはギリシア文字の大文字でシグマとよむ。

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

すなわち，$\sum_{k=1}^{n}a_k$は数列$\{a_k\}$の一般項a_kにおいて，kに1，2，3，……，nとおいて得られる項の和を表す。

例えば，

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k$$

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$$

答　(類題1)　①　$a_5=24$，$a_n=7n-11$　②　$a_5=-7$，$a_n=-3n+8$　(類題2)　初項1，公差$-\frac{1}{3}$，$a_n=\frac{4-n}{3}$，$a_{100}=-32$　(類題3)　$a_2=5$，$a_4=-1$，$a_5=-4$，$a_n=11-3n$　(例題2)　①　76　(類題4)　①　第10項　②　第8項