第1章　物体の運動

§1　位置を表す方法

目　標　物体の位置を表す方法として、座標、ベクトルについて学ぶ。

学　習　物体が運動するとは、時の経過とともにその位置を変えることであるから、運動を問題にするためには、各時刻における物体の位置を表す方法が明らかでなければならない。以下で物体の位置を表す方法について考えてみよう。

位置の表し方－1

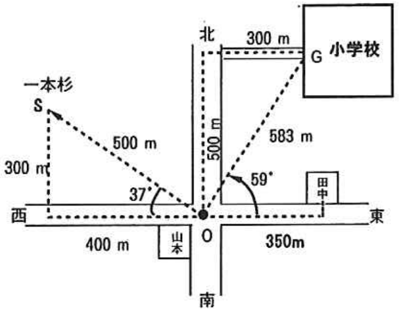


図1.1

図1.1は山本邸の付近の略図である。山本邸から一本杉、小学校の正門を眺めると、それぞれほぼ西北、東北の方角に見える。これらの位置をもう少し正確に表すには、山本邸のすぐそばの交差点の中央に1点Oをきめ、この点を基準として表すとよい。

まず一本杉の位置の表し方としては

①　点Oから西へ400m歩き、そこから北に300m歩いたところ

②　点Oから見て、西から北へ37°の方向、500mのところ

のように2つの表し方が考えられる。同じようにして、小学校の正門の位置Gを表すと、

①　点Oから北へ500m歩き、そこから東に300m歩いたところ

②　点Oから見て、東から北へ59°の方向、583mのところ

となる。

例題1　一本杉を基準にして、田中邸の位置を表せ。

解き方　図1.1から、東へ750m歩き、さらに南へ300m歩いたところ、または南へ300m歩き、東へ750m歩いたところ、と答えてもよい。

類題1　一本杉を基準にして、小学校の正門の位置を表せ。

位置の表し方－2

点Oを基準にして、一本杉や正門の位置を表す方法のうち、①の方を考えてみる。

(1)　歩く距離をいう順序がまちまちで、東西方向が先であったり、南北方向が先であったりすると間違いやすい。これを防ぐ方法はないか。

(2)　東西方向に歩くときでも、東向き、西向きといちいち断るのはわずらわしい。何か良い方法はないか。

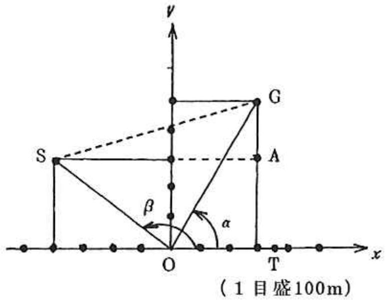


図1.2

この問題についての対策は、すでに数学で学んだように座標を導入することである。x軸、y軸はどのように選んでもよいが、横軸をx軸にし、たて軸をy軸にすることが多い。また、軸の正の向きを右と上に選ぶことが多いが、ときには異なる選び方をすることもある。前のページの問題では次のような選び方が普通である。

図1.2からわかるように、

・一本杉Sの位置（－400m，300m）

・小学校の正門Gの位置（300m，500m）

ポイント

位置を表すには、(x座標, y座標) のように書く。x座標、y座標には正、負の符号をつけて座標軸上の向きを表す。このような位置の表し方を**直交座標**による方法という。

点Oを基準にして、点S、点Gを表す方法のうち、②のような表し方を考える。

この場合には、まず距離を示し、次に方向を示す。その際、方向についてはx軸の方向から時計の針と反対回りに何度回転したかを表す。角度は図1.2で示すように測るのである。図1.2に示すように、

$\alpha \fallingdotseq 59^\circ$,　$\beta = 143^\circ$

になるので、

点Sの表し方：(500m, 143°)

点Gの表し方：(583m, 59°)

このような位置の表し方を**極座標**による方法という。

例題 2 点Sを基準とした点Gの直交座標および極座標を示せ。ただし、座標軸の向きは図1.2の通りとする。

解き方 以下では単位mは、とくに必要な場合以外すべて省略する。

点Oを基準とした直交座標では、Sは (−400, 300)

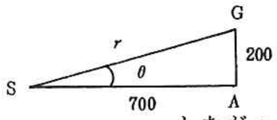
Gは (300, 500)

点Sを基準とした直交座標では、点Gは (700, 200) となる。この結果は図から明らかであるが、一般に点Sが原点になるように座標軸を平行に移動したときの点Gの新しい座標 (x', y') は次のように表される。

x' = 点Gのx座標 − 点Sのx座標

y' = 点Gのy座標 − 点Sのy座標　(1.1.1)

次に、極座標で表すには、図1.2の直角三角形GSAを考えると、下図のようになるから、



$r = \sqrt{700^2+200^2} = 728$

θの値は分度器で測って、$\theta \fallingdotseq 16^\circ$ *

したがって (728, 16°) と表される。**

類題 2 点Gを基準にして点Sの直交座標を示せ。ただし、x軸、y軸の向きは変わらないものとする

位置の表し方－3

物体の位置を表すのに、基準点すなわち原点をきめ、x軸、y軸を適当に選んで座標を使えばよいことは、(位置の表し方－2) で述べた。しかし、たとえば図1.1で一本杉Sの位置を表すのに、もっと簡単な方法はないだろうか。

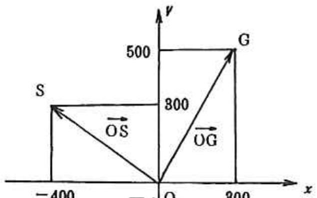


図1.3

それには、点Oから点Sに向けて引いた矢印つきの線分を用いるとよい。(図1.3参照)。このような図による表示は一目でよくわかる。これを、かりに$\overrightarrow{OS}$と表すと、$\overrightarrow{OS}$は点Oから線分に沿って矢印で示される向きに、線分の長さだけ動けば点Sに達するということを意味する。$\overrightarrow{OS}$のように、大きさ***、方向****、向きをもつものを**ベクトル**と呼ぶ。これに対して大きさのみをもつものを**スカラー**という。

* $\tan\theta = \dfrac{2}{7} = 0.2857$ だから、θの値は巻末の三角関数を使って求めることもできる。

** 極座標についてはこれ以上立ち入らないが、この表し方はベクトルでは大切である。

*** 線分の長さが大きさを表しているので、ベクトルについて述べるときは大きさという表現がよく用いられるが、図に表したベクトルについては長さといってもよい。

**** 方向と向きを区別しない表現も使われているが、このテキストでは、「東西方向に伸びている道を東向きに歩く」のように、方向と向きを使い分ける。

普段わたしたちが使っている量、たとえば５本、１万円などは大きさのみをもつ量であるからスカラーである。ベクトルで表される量を**ベクトル量**、スカラーで表される量を**スカラー量**と呼ぶ。

ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$は点Sの位置を表すという点では座標（－400，300）と同じである。

一方は図的表示、他方が数量的表示である。この**２つの表示方法が全く同じである**ということを、次のように記号 $\Longleftrightarrow$ を使って、

$$\text{ベクトル}\overrightarrow{\mathrm{OS}} \Longleftrightarrow \text{座標}（-400,\ 300） \tag{1.1.2}$$

のように表す。

数学では２つのものが全く等しいとき、**同値**という言葉を使う。上の $\Longleftrightarrow$ は読むときは同値と読む。

ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$は点Oからみた点Sの**位置を表すベクトル**（略して**位置ベクトル**）と考えることもできるが、点Oから点Sまでの移動を表すと考えても差支えないであろう。

点が位置を変えることを**変位**というから、$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$を点Oから点Sまでの**変位を表すベクトル**（略して**変位ベクトル**）と考えてもよい。

位置を表す方法には２つある。座標を使う方法とベクトルを使う方法の２つである。

座　　標：直交座標（x，y）、極座標（r，θ）

ベクトル：大きさ（長さ）、方向、向きをもった線分

数の組*を使ってベクトルを表すこともできる。

* 数の組は式(1.1.2)でいえば（－400，300）である。

§２　ベクトルの計算法

目　標　ベクトルの記号法、ベクトルの和、差を求める方法を学ぶ。

学　習　図1.4に示すように、３つのベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$を考える。

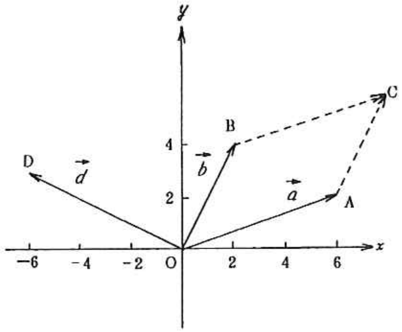


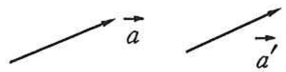
図1.4

○　記　号

ベクトルを図に書くと矢印つきの線分であるが、これを表すのに$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$のように上に矢印をつけて表すほか、もっと簡単に$\vec{a}$のように表すことも多い。

○　同　等

ベクトルは、大きさ、方向、向きをもつ量であって、この**３つの条件**だけできまり、その位置などには関係しない。したがって下の図のように２つのベクトル$\vec{a}$、$\vec{a}'$があって、それらの長さが等しく、平行で、矢印の向きが同じならば、ベクトル$\vec{a}$とベクトル$\vec{a}'$は等しいという。記号で



$$\vec{a}=\vec{a}' \tag{1.2.1}$$

と書く。図1.4で、平行四辺形OACBをつくると、

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

が成立する。