第８章　円運動と単振動

§１　等速円運動

目　標　　一定の速さで円周上を運動する物体の問題について学ぶ。

基礎となる事項　　○加速度（第１章§４）

学　習　　半径 r［m］の円周上を、一定の速さ v［m/s］で運動する質量 m［kg］の小物体があるとき、物体のこのような運動を**等速円運動**という。

等速円運動をする物体は曲線運動をしているから加速度運動をしていることになり、その加速度は、第１章§４の例題１で示したように

　　加速度の大きさ　v^2/r［m/s^2］

　　加速度の向き　　円の中心を向く向き

である。

この加速度を円運動の**向心加速度**、または**求心加速度**と呼ぶ。

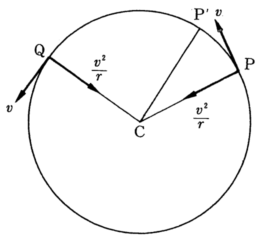

図８－１

運動の第２法則によれば、加速度は力がはたらいたときに生じるものである。従って、円運動を起こさせるには、物体を中心に向かって引く力がなければならない。われわれが小物体に円運動をさせるには、軽い丈夫な糸に小物体を結びつけ、糸が切れないように振りまわさなければならない。

上述の円運動で、小物体にはたらく力（これを**向心力**と呼ぶ）を F［N］とすると、

$$\boxed{F = m\frac{v^2}{r} \qquad (8\cdot1\cdot1)}$$

という関係が成立する。向心力 F と向心加速度 v^2/r はともに中心Cを向いているので式（8･1･1）はベクトルで表さなくてもよい。

次に等速円運動をする物体が一周するのに要する時間 T［s］は、円周が $2\pi r$ であるから、

$$T = \frac{2\pi r}{v} \ [\mathrm{s}] \qquad (8\cdot1\cdot2)$$

であり、１秒間に円の周囲をまわる回数 f は、次の式で与えられる。

$$f = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi r} \ [\mathrm{s^{-1}}] \text{ または } [\mathrm{Hz}] \qquad (8\cdot1\cdot3)$$

T を円運動の**周期**、f を**回転速度**または**回転数**と呼ぶ。f の単位としては s^{-1}(毎秒)、Hz のほかに min^{-1}(毎分)、h^{-1}(毎時)、rps（回毎秒)、rpm(回毎分)、rph(回毎時)などが用いられる。

物体が円周上の点 P を通過し、Δt 秒後に点 P′ に達したとする。円弧 PP′（記号 $\overset{\frown}{PP'}$ ）の長さを Δs［m］とすると、

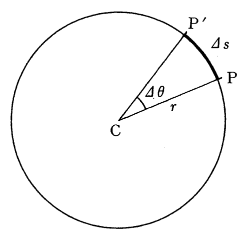

図８－２

$$\overset{\frown}{PP'} \equiv \Delta s = v\Delta t \qquad (8\cdot1\cdot4)$$

であり、また、$\angle PCP' = \Delta\theta$ とすると、円弧の長さと中心角は比例するから、比例定数を c とおくと、

$$\Delta s = c\Delta\theta \qquad (8\cdot1\cdot5)$$

ここで、比例定数 c が簡単になるように、角度の新しい単位を導入する。

$\Delta s = r$ のとき、$\Delta\theta = 1$ と約束すると、式（8･1･5）から $c = r$ となるから、式（8･1･5）は、

$$\Delta s = r\Delta\theta \qquad (8\cdot1\cdot5')$$

と書き直すことができる。

このような測り方を**弧度法**といい、単位を**ラジアン**（radian）と呼ぶ。Δs を全円周の長さに等しくとれば、$\Delta\theta = 2\pi$ となるから

$$360° = 2\pi \text{ラジアン (rad)} \qquad (8\cdot1\cdot6)$$

という関係が成立する。

式（8･1･4）、（8･1･5′）から $r\Delta\theta = v\Delta t$ がえられるから、

$$v = r\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

となる。ところで、v は一定であるから、$\Delta\theta/\Delta t$ の値も Δt の値に無関係に一定である。

この一定値を

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \ [\mathrm{rad/s}] \qquad (8\cdot1\cdot7)$$

とおき、ω*を**角速度**という。ω を用いると、動点の速さ v は、

$$v = r\omega \qquad (8\cdot1\cdot8)$$

と表される。また、(8･1･1)、(8･1･2)、(8･1･3)を ω を用いて書き直すと、

$$F = mr\omega^2 \quad [\mathrm{N}] \qquad (8\cdot1\cdot1')$$

$$T = 2\pi r/v = 2\pi/\omega \quad [\mathrm{s}] \qquad (8\cdot1\cdot2')$$

$$f = 1/T = \omega/2\pi \quad [\mathrm{Hz}] \text{ または } [\mathrm{s}^{-1}] \qquad (8\cdot1\cdot3')$$

例題１ 半径 50cm の円周上を 1.5m/s で等速円運動をする物体の加速度の大きさを求めよ。

解き方　向心加速度 $a = \dfrac{v^2}{r} = \dfrac{1.5^2}{\boxed{ⓐ}} = 4.5\boxed{ⓑ}$

例題２ 長さ１m の糸に質量 50g の小物体をつけ、水平面上で１秒間に３回転させる。向心力と角速度の大きさおよび小物体の速さを求めよ。

解き方　向心力を F [N]、角速度を ω [rad/s]、速さを v [m/s] とすると、

$$f = \omega/2\pi = 3 \quad \therefore \omega = 6\pi\,[\mathrm{rad/s}] = 18.8\,\mathrm{rad/s}$$

$$v = r\omega = 1\times\omega = 18.8\,\mathrm{m/s}$$

$$F = m\frac{v^2}{r} = 5.0\times10^{-2}\,\mathrm{kg}\times(18.8\,\mathrm{m/s})^2/1\,\mathrm{m} \fallingdotseq 17.7\,\mathrm{N}$$

（$1\mathrm{N} = 1\mathrm{kg\cdot m/s^2}$ に注意）

* ω：オメガと読む。ギリシャ小文字。大文字はΩ。

§２　慣　性　力

１．慣性力とは

目　標　　慣性力とはどのようなものかを学ぶ

基礎となる事項　　○慣性の法則（第３章§１）

学　習　　加速度運動をしている物体に観測者（われわれのこと）が乗っていると、実際には、はたらいていないのに、あたかも力がはたらいているかのように感じることがある。電車が発進するとき、乗客が電車の進行方向と逆方向に倒れそうになり、停車するときは、電車の進行方向に押されるように感じる。電車がカーブを曲がるときも、カーブの外側の方によろめいたりする。これらの原因となる力は**慣性力**と呼ばれ、われわれの体のもつ慣性に由来している。

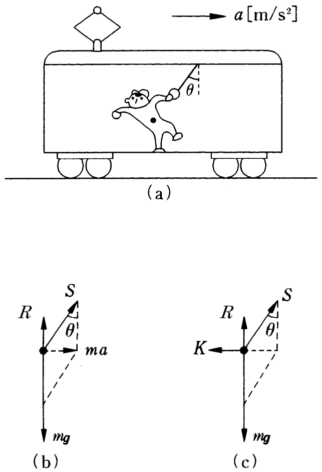

図８－３

それでは慣性力の大きさを数量的に求めてみよう。図８－３(a)は発進中の電車の中の乗客を表している。電車の加速度は図の右向きに a［m/s²］とし、人の質量を m［kg］とする。図では人の質量は黒丸の点に集めて描いてある。

ここで少々困ったことが起こった。いままでは物体に大きさを考えなかった。すなわち、大きさのないものまたは大きさはあっても、それを考える必要のない場合だけを取り扱ってきたのである。大きさをもつ物体の取り扱いは少々めんどうになるので、この場合は簡略化して、人の質量を全部一点に集め、大きさを無視する。この一点を人の**重心**という。黒丸で表した点がそれである。重心にはたらく力は、重力 mg［N］、床の垂直抗力 R［N］、吊革の張力 S［N］である。

さて、これから先は見る人の立場の違いにより言い方が変わる。

図８－３(b)は電車の外に立っている人（甲と呼ぶ）の立場で描いたものである。甲の立場で言えば次のようになる。

S、R、mgの３つの力の合力は水平で右向き、だから人は右向きに加速度運動をする。運動方程式で書くと、

甲の立場の運動方程式

水平方向　　$S\sin\theta = ma$

鉛直方向　　$S\cos\theta + R - mg = 0$　　　　(8･2･1)

これに対し、図８－３(c)は電車の中に坐っている人（乙と呼ぶ）の立場で描いたものである。乙から見ると黒丸の点は静止している。

S、R、mgの３つの力の合力がゼロになることはあり得ない。水平方向も力がつりあうためには、図のような未知の力Kがはたらいていなければならない。

乙の立場で書いたつりあいの方程式は次のようになる。

水平方向　　$S\sin\theta - K = 0$

鉛直方向　　$S\cos\theta + R - mg = 0$　　　　(8･2･2)

式（8･2･1)、(8･2･2）は同じ現象を違った立場で表しただけのものであるから、両者は一致するはずである。よって次の関係式をうる。

$$K = ma \qquad (8･2･3)$$

力 Kを**慣性力**という。大きさは ma に等しく、向きは a と逆である。